Strutture
6.1 – Strutture

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Semantica

Consideriamo un generico linguaggio del prim'ordine

$$L = \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Rel}\,.$$

Il nostro obiettivo è quello di definire opportune nozioni di **modello** (= L-**struttura**) $\mathcal{A}$ e di **interpretazione** in $\mathcal{A}$ di termini e formule di L.

L-strutture

Una L-**struttura** $\mathcal{A}$ consiste di

- un insieme non vuoto, detto **universo** o **dominio** della struttura, generalmente indicato con $|\mathcal{A}|$ o anche con la medesima lettera usata per la struttura, ma in carattere tondo, in questo caso A;
- un'**interpretazione** in $\mathcal{A}$ di ogni simbolo di L, definita come segue:
  - se $R \in \mathrm{Rel}$ è un simbolo relazionale n-ario, la sua interpretazione $R^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ è una relazione n-aria su A , cioè
  $$R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}};$$
  - se $f \in \mathrm{Func}$ è un simbolo funzionale n-ario, allora
  $$f^{\mathcal{A}} \colon A^n \to A,$$
  cioè $f^{\mathcal{A}}$ è una funzione n-aria con argomenti e valori in A;
  - se $c \in \mathrm{Const}$ è un simbolo di costante, la sua interpretazione in $\mathcal{A}$ consiste di un elemento
  $$c^{\mathcal{A}} \in A.$$

L-strutture

Se $\mathrm{Rel} = \{R_1, R_2, \dots\}$, $\mathrm{Func} = \{f_1, f_2, \dots\}$ e $\mathrm{Const} = \{c_{1\}, c_2, \dots}$, la L-struttura $\mathcal{A}$ sarà denotata con

$$\langle A, R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}}, \dots, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \dots, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle.$$

Esempi di L-strutture (1)

Vediamo alcuni esempi di L-strutture, dove $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario.

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Si tratta della struttura con dominio $\mathbb{N}$ e in cui il simbolo di relazione binario P viene interpretato nella relazione binaria $\leq$ su $\mathbb{N}$, in simboli
$$P^{\mathcal{A}} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}.$$
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}} \rangle$ dove $P^{\mathcal{B}}$ è la relazione di congruenza modulo 3 su $\mathbb{N}$. Dunque $\mathcal{B}$ è la struttura con dominio $\mathbb{N}$ in cui il simbolo di relazione binario P viene interpretato nella relazione binaria su $\mathbb{N}$
$$P^{\mathcal{B}} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \equiv m \pmod 3\}.$$
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$.
- $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Z}, P^{\mathcal{D}} \rangle$, dove $P^{\mathcal{D}}$ è la relazione di congruenza modulo 3 su $\mathbb{Z}$.

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario. Come negli esempi precedenti, per definire una L-struttura bisogna specificare:

1. il suo dominio, che deve essere un insieme non vuoto X;
2. una qualche relazione binaria R su X.

Ogni coppia del tipo $\langle X, R\rangle$ che soddisfi queste due condizioni è una L-struttura, indipendentemente dalle eventuali proprietà particolari di X e/o R. Inoltre, cambiando il dominio e/o la relazione binaria su di esso, si ottengono L-strutture diverse.

Quindi anche i seguenti sono esempi di L-strutture.

- $\mathcal{E} = \langle X, R\rangle$ dove X è l'insieme dei residenti del comune di Torino e $R \subseteq X \times X$ è la relazione definita da "$a \; R \; b$ se e solo se a è figlio di b", in simboli

$$R = \{\langle a, b\rangle \in X \times X \mid \; a \text{ è figlio di } b\}.$$

- $\mathcal{F} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d)\}\rangle$,
- $\mathcal{G} = \langle \{a, b\}, \emptyset\rangle$
- ...

Esempi di L-strutture (2)

Sia ora $L = \{Q\}$ con Q simbolo di relazione unario. In questo caso una L-struttura $\mathcal{A} = \langle A, Q^{\mathcal{A}} \rangle$ è data da un insieme non vuoto A (il suo dominio) e da una relazione unaria $Q^{\mathcal{A}}$ su A, ovvero da un sottoinsieme $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A^1$. Poiché A^1 è identificato con A stesso, la relazione unaria $Q^{\mathcal{A}}$ non è altro che un qualche sottoinsieme del dominio di $\mathcal{A}$.

Sono dunque esempi di L-struttura:

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \mathbb{N} \rangle$
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, Q^{\mathcal{B}} \rangle$, dove $Q^{\mathcal{B}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p$ è un numero primo$\}$
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}, \emptyset \rangle$
- $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Q}, \{\frac{1}{2}, -3, \frac{4}{5}\} \rangle$
- $\mathcal{E} = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R} \rangle$
- $\dots$

Esempi di L-strutture (3)

Sia ora $L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Le seguenti sono L-strutture:

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dove $\mathbb{Z}$ è il dominio di $\mathcal{A}$ e la somma interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{A}}(n,m) = n + m$ per ogni $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$).
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ dove $\mathbb{N}$ è il dominio di $\mathcal{B}$ e la somma interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{B}}(n,m) = n + m$ per ogni $(n,m) \in \mathbb{N}^2$).
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ dove $\mathbb{Q}$ è il dominio di $\mathcal{C}$ e il prodotto interpreta il simbolo di funzione binario f (ossia $f^{\mathcal{C}}(r,q) = r \cdot q$ per ogni $(r,q) \in \mathbb{Q}^2$).

Più in generale, per definire una L-struttura bisogna specificare:

1. il suo dominio, che deve essere un insieme non vuoto X;
2. una qualche funzione binaria $g \colon X^2 \to X$.

Ogni coppia del tipo $\langle X, g \rangle$ che soddisfi queste due condizioni è una L-struttura, indipendentemente dalle proprietà particolari di X e/o g.

$L = \{f\}$ con f simbolo di funzione binario. Altri esempi di L-strutture sono:

- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$
- $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è l'insieme dei numeri reali non nulli
- $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, dove $\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei numeri reali maggiori di 0
- $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$, dove $\mathbb{Z}_3 = \{[n]_3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è l'insieme delle classi di resto modulo 3
- $\langle \{a, b, c\}, F \rangle$, dove
$$F \colon (\{a, b, c\})^2 \to \{a, b, c\}, \qquad (x, y) \mapsto x$$
è la funzione che assegna ad ogni coppia la sua prima componente
- ...

NON è invece una L-struttura la coppia $\langle \mathbb{N}, - \rangle$, perché la sottrazione non è una funzione da $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}$ (non è definita per tutte le coppie di numeri naturali).

Esempi di L-strutture (4)

Sia $L = \{P, f, c\}$ un linguaggio con P simbolo di relazione binario, f simbolo di funzione binario e c simbolo di costante. Le seguenti sono L-strutture.

- $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \leq, +, 0 \rangle$ dove $P^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \leq m\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ interpreta il simbolo di relazione binario P,
$$f^{\mathcal{A}} \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, \qquad (n, m) \mapsto n + m$$
interpreta il simbolo di funzione binario f e $c^{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{Z}$ interpreta il simbolo di costante c.
- $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, <, \cdot, 100 \rangle$ dove $P^{\mathcal{B}}$ è la relazione di minore stretto $<$, $f^{\mathcal{B}}$ è la moltiplicazione tra numeri interi e $c^{\mathcal{B}}$ è il numero intero 100.
- $\mathcal{C} = \langle \mathbb{R}, \geq, \cdot, -\sqrt{2} \rangle$ dove $P^{\mathcal{C}}$ è $\geq$, $f^{\mathcal{C}}$ è la moltiplicazione tra numeri reali e $c^{\mathcal{C}}$ è il numero reale $-\sqrt{2}$.
- ...

È possibile che $c_i^{\mathcal{A}} = c_j^{\mathcal{A}}$, anche se i simboli di costante sono distinti.

Analogamente, se i simboli di predicato R_i e R_j o i simboli di funzione f_i e f_j hanno la stessa arietà, è possibile che $R_i^{\mathcal{A}} = R_j^{\mathcal{A}}$ o che $f_i^{\mathcal{A}} = f_j^{\mathcal{A}}$.

Esempio

Se $L = \{P, Q, a, b\}$ con P e Q simboli di relazione binari e a, b simboli di costante, è legittimo considerare la L-struttura

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, \leq, 0, 0 \rangle,$$

ovvero la struttura con dominio A e tale che

$$P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$$

e

$$a^{\mathcal{A}} = b^{\mathcal{A}} = 0.$$

Alcune precisazioni e osservazioni

Per convenzione, se i simboli di un linguaggio L sono elencati in un determinato ordine, allora anche le relazioni/funzioni/costanti che li interpretano in una data struttura vanno presentati nello stesso ordine.

Esempio

Se $L = \{P, f, g, c\}$ con P simbolo di relazione binario, f e g simboli di funzione binari e c simbolo di costante, allora dire che

$$\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 3 \rangle$$

è una L-struttura significa che $\mathbb{R}$ è il dominio della struttura, $<$ è l'interpretazione di P, la somma $+$ è l'interpretazione di f, il prodotto $\cdot$ è l'interpretazione di g e 3 è l'interpretazione di c.

A cosa servono le L-strutture?

Sia $L = \{P\}$ con P simbolo di relazione binario e sia φ l'enunciato $\exists x \forall y P(x, y)$, che asserisce che "esiste un x che è in relazione P con tutti gli y". Non ha senso chiedersi se φ sia vero o falso: la risposta infatti dipenderà da

- quali oggetti/elementi decidiamo di considerare
- qual'è la relazione P in questione.

Ad esempio, se decidiamo di considerare i numeri naturali e di identificare P con l'usuale relazione d'ordine $\leq$ su tale insieme, allora φ è vero, perché esiste un elemento, lo 0, che è minore o uguale di tutti i numeri naturali. Tecnicamente, quello che abbiamo fatto è considerare la L-struttura $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ e osservare che φ, interpretato in tale struttura, è vero. Se invece consideriamo le L-strutture $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ oppure $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$, allora φ risulta falso in esse (perché?).

Le L-strutture servono a fornire un "contesto" in cui interpretare le formule del prim'ordine scritte utilizzando il linguaggio L.